УДК 517.956.4

С. Д. Ивасишен, В. П. Лавренчук

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

Доказана теорема о представлении классических решений параболических систем с оператором Бесселя в виде интегралов Пуассона функций или обобщенных борелевских мер из специальных пространств $L_p^{k(0,a)}$, $1 < p \leqslant \infty$, или $M^{k(0,a)}$.

Для исследования вопросов разрешимости, свойств решений как линейных, так и нелинейных уравнений важное значение имеют результаты о представлении в интегральной форме решений линейных уравнений. Вопросам интегрального представления решений параболических по Петровскому и $\overrightarrow{2b}$ — параболических систем уравнений, а также некоторых вырожденных параболических уравнений посвящены многие работы (см. [1—5]). В данной работе доказывается теорема о представлении в интегральной форме решений параболической системы уравнений с определенным вырождением, а именно системы уравнений, содержащих оператор Бесселя (B — параболической системы). При доказательстве используется методика из работы [5].

Пусть n, b, N — заданные натуральные числа; $x = (x', x_{n+1})$, $x' = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_{n+1} \in \mathbb{R}_+$; $\Pi = (0, T] \times \mathbb{R}_+^{n+1}$, где $\mathbb{R}_+^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$, T — заданное положительное число, $\overline{\Pi}$ — замыкание Π; $\mathbb{C}^{NN}$ и $\mathbb{C}^N$ — совокупности соответственно всех квадратных матриц $M = (m_{ij})_{i,j=1}^N$ порядка N и всех столбцов $S = (s_i)_{i=1}^N$ высоты N, элементы которых являются комплексными числами; $|M| = \max\{|m_{ij}| \,|\, 1 \leqslant i, j \leqslant N\}$, $|S| = \left(\sum_{i=1}^{N} |s_i|^2\right)^{1/2}$.

Рассмотрим систему уравнений

$$D_t^1 u = \sum_{|k|+2j \leqslant 2b} a_{kj}(t, x) D_{x'}^k B_{x_{n+1}}^j u, \quad (t, x) \in \overline{\Pi}, \tag{1}$$

где $a_{kj} : \overline{\Pi} \to \mathbb{C}^{NN}$, $|k| + 2j \leqslant 2b$, $u : \Pi \to \mathbb{C}^N$, $D_{x'}^k = D_{x_1}^{k_1} \ldots D_{x_n}^{k_n}$, $B_{x_{n+1}} = D_{x_{n+1}}^2 + \frac{2r+1}{x_{n+1}} D_{x_{n+1}}^1 \left(r > -\frac{1}{2}\right)$ — оператор Бесселя. Предположим, что выполняются следующие условия:

а) система (1) равномерно B-параболическая на множестве $\overline{\Pi}$, т. е. λ — корни уравнения

$$\det\left(\sum_{|k|+2j=2b} a_{kj}(t, x)(i\sigma')^k(-\sigma_{n+1}^2)^j - \lambda I\right) = 0$$

(i — мнимая единица, I — единичная матрица порядка N) — удовлетворяют условию

$$\exists \delta > 0 \quad \forall \sigma = (\sigma', \sigma_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad \forall (t, x) \in \overline{\Pi}:$$

$$\operatorname{Re}\lambda \leqslant -\delta|\sigma|^{2b};$$

б) коэффициенты a_{kj}, $|k| + 2j \leqslant 2b$, непрерывны по t на $[0, T]$ при каждом $x \in \overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$, причем непрерывность a_{kj}, $|k| + 2j = 2b$, равномерна по $x \in \overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$; все коэффициенты ограничены на $\overline{\Pi}$ и удовлетворяют условию Гельдера по x в $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ равномерно по $t \in [0, T]$;

в) существует система, сопряженная по Лагранжу с системой (1), и ее коэффициенты удовлетворяют условию б).

Отметим, что в б) условие Гельдера можно заменить соответствующим условием Дини (см. [6]).

Как доказано в [6], при выполнении условий а) и б) существует фундаментальная матрица решений Z задачи Коши

$$u(t, x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^{n+1},$$

$$D_{x_{n+1}}^1 u(t, x)|_{x_{n+1}=0} = 0, \quad (t, x') \in (0, T] \times \mathbb{R}^n = \Pi'$$

для системы (1), для которой справедливы оценки

$$|D_{x'}^k B_{x_{n+1}}^j Z(t, x; \tau, \xi)| \leqslant C(t-\tau)^{-\beta-\frac{|k|+2j}{2b}} \Phi_c(t-\tau, x', \xi') T_{x_{n+1}}^{\xi_{n+1}}[\Phi_c(t - \tau, x_{n+1}, 0)],$$

$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}_+^{n+1}, \quad |k| + 2j \leqslant 2b, \quad C > 0, \ c > 0. \tag{2}$$

Здесь использованы следующие обозначения: $\beta = \frac{n + 2(r+1)}{2b}$, $\Phi_c(t, y, \eta) = \exp\left\{-ct^{1-q} \sum_{i=1}^{s} |y_i - \eta_i|^q\right\}$, $t > 0$, $\{y = (y_1, \ldots, y_s), \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_s)\} \subset \mathbb{R}^s$, $s \geqslant 1$, $q = \frac{2b}{2b-1}$; $T_{x_{n+1}}^{\xi_{n+1}}$ — оператор обобщенного сдвига, свойства которого исследованы в [7].

Если же выполнены условия а) и в), то существует фундаментальная матрица решений Z^* задачи Коши для сопряженной системы и имеет место равенство

$$Z^*(\tau, \xi; t, x) = \overline{Z}'(t, x; \tau, \xi),$$

$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}_+^{n+1}. \tag{3}$$

Здесь и далее штрих означает транспонирование, а черта — комплексное сопряжение.

Определим используемые нормы и пространства. Пусть c_0, a и T — фиксированные числа, такие, что $0 < c_0 < c$, $a > 0$, $T_0 \in (0, T]$, $T_0 < \left(\frac{c_0}{a}\right)^{2b-1}$, где c — постоянная из оценок (2), $\Pi_0 = (0, T_0] \times \mathbb{R}_+^{n+1}$. Введем функции

$$k(t, a) = c_0 a / (c_0^{2b-1} - a^{2b-1} t)^{q-1},$$

$$\Psi_\alpha(t, a, x) = \exp\left\{-\alpha k(t, a) \sum_{j=1}^{n+1} |x_j|^q\right\},$$

$$t \in [0, T_0], \quad x \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Эти функции обладают следующими свойствами:

$$k(t - \tau, k(\tau, a)) = k(t, a),$$

$$\Phi_{c_0}(t - \tau, x, \xi) \Psi_{-1}(\tau, a, \xi) \leqslant$$

$$\leqslant \Psi_{-1}(t, a, x), \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T_0, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^{n+1}. \tag{4}$$

Пусть $u : \overline{\Pi}_0 \to \mathbb{C}^N$ — заданная функция, измеримая в смысле Лебега по x при каждом $t \in [0, T_0]$. Для $t \in [0, T_0]$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$ определим нормы

$$\| u(t, \cdot) \|_p^{k(t,a)} = \| \Psi_1(t, a, \cdot) u(t, \cdot) \|_{L_p(\mathbb{R}_+^{n+1}, \lambda)},$$

где $L_p(\mathbb{R}_+^{n+1}, \lambda)$ — L_p — пространство функций $\varphi : \mathbb{R}_+^{n+1} \to \mathbb{C}^N$ относительно меры λ, связанной с мерой Лебега с помощью равенства

$$\lambda(A) = \int_A x_{n+1}^{2r+1} dx.$$

Заметим, что при этом для $1 \leqslant p < \infty$

$$\| \varphi \|_{L_p(\mathbb{R}_+^{n+1}, \lambda)} = \left(\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |\varphi(x)|^p x_{n+1}^{2r+1} dx \right)^{1/p}.$$

Обозначим через $L_p^{k(0,a)}$ пространство всех λ-измеримых функций $\varphi : \mathbb{R}_+^{n+1} \to \mathbb{C}^N$, для которых конечна норма $\| \varphi \|_p^{k(0,a)}$.

Пусть $\mathscr{B}$ — σ-алгебра борелевских множеств полупространства $\mathbb{R}_+^{n+1}$, а M — совокупность всех счетно аддитивных функций $\nu : \mathscr{B} \to \mathbb{C}^N$ (обобщенных борелевских мер ν), имеющих конечную полную вариацию $|\nu|(\mathbb{R}_+^{n+1})$. Если для ν ввести норму по формуле $\|\nu\| = |\nu|(\mathbb{R}_+^{n+1})$, то M становится банаховым пространством, которое можно отождествить с пространством, сопряженным к пространству $C_0(\mathbb{R}_+^{n+1})$ всех таких непрерывных функций $\psi : \mathbb{R}_+^{n+1} \to \mathbb{C}^N$, что $|\psi(x)| \to 0$ при $|x| \to \infty$, с равномерной нормой. Через $M^{k(0,a)}$ обозначим совокупность всех обобщенных борелевских мер $\mu : \mathscr{B} \to \mathbb{C}^N$, удовлетворяющих такому условию: функция

$$\nu(A) = \int_A \Psi_1(0, a, x) \, d\mu(x), \quad A \in \mathscr{B}$$

принадлежит пространству M. При этом для любой $\mu \in M^{k(0,a)}$

$$\| \mu \|^{k(0,a)} = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \Psi_1(0, a, x) \, d|\mu|(x) < \infty.$$

Теорема. Пусть u — решение системы (1) в Π_0, удовлетворяющее условиям

$$D_{x_{n+1}}^1 u(t, x)|_{x_{n+1}=0} = 0, \ (t, x') \in \Pi',$$

$$\forall t \in (0, T_0] : \| u(t, \cdot) \|_p^{k(t,a)} \leqslant C \tag{5}$$

с некоторыми C и $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Тогда при $1 < p \leqslant \infty$ существует функция

$\varphi \in L_p^{k(0,a)}$, а при $p = 1$ — обобщенная мера $\mu \in M^{k(0,a)}$, причем решение u представимо соответственно в виде

$$u(t, x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} Z(t, x;\ 0, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\lambda(\xi), \quad (t, x) \in \Pi_0 \tag{6}$$

и

$$u(t, x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} Z(t, x;\ 0, \xi)\,d\mu(\xi), \quad (t, x) \in \Pi_0. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть сначала $1 < p \leqslant \infty$. Из условия (5) следует, что последовательность функций

$$\left\{\Psi_1\left(\frac{1}{m}, a, x\right) u\left(\frac{1}{m}, x\right),\ x \in \mathbb{R}_+^{n+1},\ m \geqslant 1\right\} \tag{8}$$

ограничена в пространстве $L_p(\mathbb{R}_+^{n+1}, \lambda)$. Это пространство изометрично пространству, сопряженному к $L_{p'}(\mathbb{R}_+^{n+1}, \lambda)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. По теореме о слабой компактности ограниченного множества в сопряженном пространстве последовательность (8) слабо компактна в $L_p(\mathbb{R}_+^{n+1}, \lambda)$. Следовательно, существует подпоследовательность

$$\left\{\Psi_1\left(\frac{1}{m(l)}, a, x\right) u\left(\frac{1}{m(l)}, x\right),\ x \in \mathbb{R}_+^{n+1},\ l \geqslant 1\right\}, \tag{9}$$

слабо сходящаяся к некоторой функции $\chi \in L_p(\mathbb{R}_+^{n+1}, \lambda)$, т. е.

$$\forall v \in L_{p'}(\mathbb{R}_+^{n+1}, \lambda) : \lim_{l \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \bar{v}'(\xi)\,\Psi_1\left(\frac{1}{m(l)}, a, \xi\right) \times$$

$$\times\, u\left(\frac{1}{m(l)}, \xi\right) d\lambda(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \bar{v}'(\xi)\,\chi(\xi)\,d\lambda(\xi). \tag{10}$$

Положим $\varphi(\xi) = \Psi_{-1}(0, a, \xi)\,\chi(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}_+^{n+1}$. Тогда $\varphi \in L_p^{k(0,a)}$ и соотношение (10) записывается в виде

$$\forall v \in L_{p'}(\mathbb{R}_+^{n+1}, \lambda) : \lim_{l \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \bar{v}'(\xi)\,\Psi_1\left(\frac{1}{m(l)}, a, \xi\right) \times$$

$$\times\, u\left(\frac{1}{m(l)}, \xi\right) d\lambda(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \bar{v}'(\xi)\,\Psi_1(0, a, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\lambda(\xi). \tag{11}$$

Возьмем фиксированную точку $(t, x) \in \Pi_0$ и рассмотрим функции

$$v_j(\xi) = Z_j^*(0, \xi;\ t, x)\,\Psi_{-1}(0, a, \xi), \quad \xi \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \tag{12}$$

где Z_j^* — j-й столбец матрицы Z^*. Из оценки

$$|v_j(\xi)| \leqslant Ct^{-\beta}\Phi_c(t, x', \xi')\,T_{x_{n+1}}^{\xi_{n+1}}[\Phi_c(t, x_{n+1}, 0)] \times$$

$$\times\, \Psi_{-1}(0, a, \xi) \leqslant Ct^{-\beta}\Phi_{c-c_0}(t, x, \xi)\,\Psi_{-1}(t, a, x), \quad \xi \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \tag{13}$$

получающейся с помощью (2) — (4) и неравенства

$$T_{x_{n+1}}^{\xi_{n+1}}[\Phi_c(t, x_{n+1}, 0)] \leqslant C\Phi_c(t, x_{n+1}, \xi_{n+1}), \tag{14}$$

следует, что $v_j \in L_{p'}(\mathbb{R}_+^{n+1}, \lambda)$. Поэтому в силу (3) и (11)

$$\lim_{l \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} Z(t, x;\ 0, \xi)\,\Psi_{-1}(0, a, \xi)\,\Psi_1\left(\frac{1}{m(l)}, a, \xi\right) \times$$

$$\times\, u\left(\frac{1}{m(l)}, \xi\right) d\lambda(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} Z(t, x;\ 0, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\lambda(\xi). \tag{15}$$

Можно предполагать, что $1/m(l) \leqslant t/2$, $l \geqslant 1$. Согласно теореме о единственности решения задачи Коши [6]:

$$u(t, x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} Z(t, x;\ 1/m(l), \xi)\, u(1/m(l), \xi)\, d\lambda(\xi). \tag{16}$$

В силу (16) получаем

$$\begin{aligned} u(t, x) - \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} Z(t, x;\ 0, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\lambda(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} (Z(t, x;\ 1/m(l), \xi) - \\ - Z(t, x;\ 0, \xi))\, u(1/m(l), \xi)\, d\lambda(\xi) + \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} Z(t, x;\ 0, \xi) \times \\ \times (1 - \Psi_{-1}(0, a, \xi)\, \Psi_1(1/m(l), a, \xi))\, u(1/m(l), \xi)\, d\lambda(\xi) + \\ + \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} Z(t, x;\ 0, \xi)\, \Psi_{-1}(0, a, \xi)\, \Psi_1(1/m(l), a, \xi)\, d\lambda(\xi) - \\ - \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} Z(t, x;\ 0, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\lambda(\xi) \Bigg) = I_1^{(l)} + I_2^{(l)} + I_3^{(l)}, \quad l \geqslant 1. \end{aligned} \tag{17}$$

Чтобы получить представление (6), достаточно доказать, что для $j = 1, 2, 3$

$$\lim_{l \to \infty} I_j^{(l)} = 0. \tag{18}$$

Из (15) следует (18) для $j = 3$. Докажем (18) для $j = 2$. С помощью неравенства Гельдера и оценки (5) имеем

$$|I_2^{(l)}| \leqslant C \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} F_l(\xi)\, d\lambda(\xi) \Bigg)^{1/p'}, \tag{19}$$

где для $\xi \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ и $l \geqslant 1$

$$F_l(\xi) = \left(|Z(t, x;\ 0, \xi)|\, \left| \Psi_{-1}\left(\frac{1}{m(l)}, a, \xi\right) - \Psi_{-1}(0, a, \xi) \right| \right)^{p'}.$$

Изучим свойства функций F_l, $l \geqslant 1$. Из (2), (4) и (14) следуют неравенства

$$\begin{aligned} (F_l(\xi))^{1/p'} \leqslant C t^{-\beta} \Phi_c(t, x, \xi)\, |\Psi_{-1}(1/m(l), a, \xi) - \Psi_{-1}(0, a, \xi)| \leqslant \\ \leqslant C t^{-\beta} \Phi_{c-c_0}(t, x, \xi)\, (\Psi_{-1}(t, k(1/m(l), a), x) + \Psi_{-1}(t, a, x)) \leqslant \\ \leqslant C t^{-\beta} \Phi_{c-c_0}(t, x, \xi)\, (\Psi_{-1}(t, k(1/m(1), a), x) + \Psi_{-1}(t, a, x)), \quad \xi \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \ l \geqslant 1, \end{aligned} \tag{20}$$

поскольку

$$k(t, k(1/m(l), a)) \leqslant k(t, k(1/m(1), a)), \quad l \geqslant 1. \tag{21}$$

Из (20) следует существование у последовательности $\{F_l, l \geqslant 1\}$ интегрируемой мажоранты. Так как для каждого $\xi \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ $\lim\limits_{l \to \infty} F_l(\xi) = 0$, то в силу теоремы Лебега о мажорантной сходимости

$$\lim_{l \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} F_l(\xi)\, d\lambda(\xi) = 0.$$

Отсюда с учетом (19) получаем (18) для $j = 2$.

Докажем (18) для $j = 1$. Будем пользоваться вытекающей из (2), (3) и (14) оценкой

$$|Z(t, x;\ \tau, \xi) - Z(t, x;\ 0, \xi)| \leqslant C \tau^{\gamma} (t - \tau)^{-\beta-\gamma}\, \Phi_{c_1}(t, x, \xi),$$

$$0 < \tau < t \leqslant T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}_+^{n+1}, \quad 0 < \gamma < 1, \quad c_0 < c_1 < c,$$

Можно предполагать, что $1/m(l) \leqslant t/2$, $l \geqslant 1$. Согласно теореме о единственности решения задачи Коши [6]:

$$u(t, x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} Z(t, x;\ 1/m(l), \xi)\, u(1/m(l), \xi)\, d\lambda(\xi). \tag{16}$$

В силу (16) получаем

$$u(t, x) - \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} Z(t, x;\ 0, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\lambda(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} (Z(t, x;\ 1/m(l), \xi) -$$

$$- Z(t, x;\ 0, \xi))\, u(1/m(l), \xi)\, d\lambda(\xi) + \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} Z(t, x;\ 0, \xi) \times$$

$$\times (1 - \Psi_{-1}(0, a, \xi)\, \Psi_1(1/m(l), a, \xi))\, u(1/m(l), \xi)\, d\lambda(\xi) +$$

$$+ \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} Z(t, x;\ 0, \xi)\, \Psi_{-1}(0, a, \xi)\, \Psi_1(1/m(l), a, \xi)\, d\lambda(\xi) - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} Z(t, x;\ 0, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\lambda(\xi) \right) = I_1^{(l)} + I_2^{(l)} + I_3^{(l)}, \quad l \geqslant 1. \tag{17}$$

Чтобы получить представление (6), достаточно доказать, что для $j = 1, 2, 3$

$$\lim_{l \to \infty} I_j^{(l)} = 0. \tag{18}$$

Из (15) следует (18) для $j = 3$. Докажем (18) для $j = 2$. С помощью неравенства Гельдера и оценки (5) имеем

$$|I_2^{(l)}| \leqslant C \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} F_l(\xi)\, d\lambda(\xi) \right)^{1/p'}, \tag{19}$$

где для $\xi \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ и $l \geqslant 1$

$$F_l(\xi) = \left(|Z(t, x;\ 0, \xi)|\, \left| \Psi_{-1}\left(\frac{1}{m(l)}, a, \xi\right) - \Psi_{-1}(0, a, \xi) \right| \right)^{p'}.$$

Изучим свойства функций F_l, $l \geqslant 1$. Из (2), (4) и (14) следуют неравенства

$$(F_l(\xi))^{1/p'} \leqslant Ct^{-\beta} \Phi_c(t, x, \xi)\, |\Psi_{-1}(1/m(l), a, \xi) - \Psi_{-1}(0, a, \xi)| \leqslant$$

$$\leqslant Ct^{-\beta} \Phi_{c-c_0}(t, x, \xi)\, (\Psi_{-1}(t, k(1/m(l), a), x) + \Psi_{-1}(t, a, x)) \leqslant$$

$$\leqslant Ct^{-\beta} \Phi_{c-c_0}(t, x, \xi)\, (\Psi_{-1}(t, k(1/m(1), a), x) + \Psi_{-1}(t, a, x)), \quad \xi \in \mathbb{R}_+^{n+1},\ l \geqslant 1, \tag{20}$$

поскольку

$$k(t, k(1/m(l), a)) \leqslant k(t, k(1/m(1), a)), \quad l \geqslant 1. \tag{21}$$

Из (20) следует существование у последовательности $\{F_l, l \geqslant 1\}$ интегрируемой мажоранты. Так как для каждого $\xi \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ $\lim\limits_{l \to \infty} F_l(\xi) = 0$, то в силу теоремы Лебега о мажорантной сходимости

$$\lim_{l \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} F_l(\xi)\, d\lambda(\xi) = 0.$$

Отсюда с учетом (19) получаем (18) для $j = 2$.

Докажем (18) для $j = 1$. Будем пользоваться вытекающей из (2), (3) и (14) оценкой

$$|Z(t, x;\ \tau, \xi) - Z(t, x;\ 0, \xi)| \leqslant C\tau^{\gamma} (t - \tau)^{-\beta-\gamma} \Phi_{c_1}(t, x, \xi),$$

$$0 < \tau < t \leqslant T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}_+^{n+1}, \quad 0 < \gamma < 1, \quad c_0 < c_1 < c,$$

которая при $\tau = 1/m(l)$ с учетом того, что $1/m(l) \leqslant t/2$, имеет вид

$$|Z(t, x; 1/m(l), \xi) - Z(t, x; 0, \xi)| \leqslant C\left(\frac{1}{m(l)}\right)^{\gamma} t^{-\beta-\gamma} \times$$

$$\times \Phi_{c_1}(t, x, \xi), 0 < t \leqslant T, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}_+^{n+1}, l \geqslant 1. \qquad (22)$$

Используя (4), (5), (21), (22) и неравенство Гельдера, получаем

$$|I_1^{(l)}| \leqslant C\left(\frac{1}{m(l)}\right)^{\gamma} t^{-\beta-\gamma} \Psi_{-1}(t, k(1/m(l), a), x) \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |u(1/m(l), \xi)| \Psi_1(1/m(l), a, \xi) \Phi_{c_1-c_0}(t, x, \xi)\, d\lambda(\xi) \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\frac{1}{m(l)}\right)^{\gamma} t^{-\beta-\gamma} \Psi_{-1}(t, k(1/m(1), a), x) \| u(1/m(l), \cdot)\|_p^{k(1/m(l), a)} \times$$

$$\times \left(\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \Phi_{(c_1-c_0)p'}(t, x, \xi)\, d\lambda(\xi)\right)^{1/p'} \leqslant C(t, x)\left(\frac{1}{m(l)}\right)^{\gamma} \to 0, l \to \infty,$$

так как

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \Phi_{(c_1-c_0)p'}(t, x, \xi)\, d\lambda(\xi) = C(t, x).$$

Пусть $p = 1$. Из условия (5) следует, что последовательность (8) ограничена в пространстве $L_1(\mathbb{R}_+^{n+1}, \lambda)$. Это пространство не является сопряженным ни к какому другому банахову пространству, но оно вкладывается в пространство обобщенных мер M. Как отмечалось, пространство M изометрично пространству, сопряженному к $C_0(\mathbb{R}_+^{n+1})$. Из ограниченности в $L_1(\mathbb{R}_+^{n+1}, \lambda)$ последовательности (8) следует ограниченность соответствующей последовательности обобщенных мер в M и, следовательно, слабая компактность последней. Поэтому существуют подпоследовательность (9) и обобщенная мера $\nu \in M$, такие, что

$$\forall v \in C_0(\mathbb{R}_+^{n+1}) : \lim_{l\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \bar{v}'(\xi) \Psi_1(1/m(l), a, \xi) \times$$

$$\times u(1/m(l), \xi)\, d\lambda(\xi) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \bar{v}'(\xi)\, d\nu(\xi). \qquad (23)$$

Для ограниченных множеств $A \in \mathscr{B}$ положим

$$\mu(A) = \int_A \Psi_{-1}(0, a, x)\, d\nu(x)$$

и тогда

$$\int_A \Psi_1(0, a, x)\, d\mu(x) = \int_A \Psi_1(0, a, x) \Psi_{-1}(0, a, x)\, d\nu(x) = \nu(A).$$

Если A — неограниченное множество из $\mathscr{B}$, то рассмотрим монотонно неубывающую последовательность ограниченных множеств $A_k \in \mathscr{B}$, $k \geqslant 1$, такую, что $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A$ и положим

$$\int_A \Psi_1(0, a, x)\, d\mu(x) = \lim_{k\to\infty} \int_{A_k} \Psi_1(0, a, x)\, d\mu(x) = \lim_{k\to\infty} \nu(A_k) = \nu(A).$$

Так, определенная функция μ принадлежит пространству $M^{k(0,a)}$, и равенство (23) записывается в виде

$$\forall v \in C_0(\mathbb{R}_+^{n+1}) : \lim_{l\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \bar{v}'(\xi) \Psi_1(1/m(l), a, \xi) u(1/m(l), \xi)\, d\lambda(\xi) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \bar{v}'(\xi) \Psi_1(0, a, \xi)\, d\mu(\xi). \qquad (24)$$

Из оценок (13) следует, что функции (12) принадлежат пространству $C_0(\mathbb{R}_+^{n+1})$ для любой фиксированной точки $(t, x) \in \Pi_0$. Поэтому в силу (3) и (24) получаем

$$\lim_{l\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} Z(t, x; 0, \xi)\, \Psi_{-1}(0, a, \xi)\, \Psi_1(1/m(l), a, \xi)\, u(1/m(l), \xi)\, d\lambda(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} Z(t, x; 0, \xi)\, d\mu(\xi). \tag{25}$$

Рассуждая далее так же, как при $p > 1$, с помощью (16) записываем равенства

$$u(t, x) - \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} Z(t, x; 0, \xi)\, d\mu(\xi) = I_1^{(l)} + I_2^{(l)} + \tilde{I}_3^{(l)}, \quad l \geqslant 1, \tag{26}$$

где $I_j^{(l)}$, $j = 1, 2$, те же, что и в (17), а

$$\tilde{I}_3^{(l)} = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} Z(t, x; 0, \xi)\, \Psi_{-1}(0, a, \xi)\, \Psi_1(1/m(l), a, \xi)\, u(1/m(l), \xi)\, d\lambda(\xi) - \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} Z(t, x; 0, \xi)\, d\mu(\xi).$$

Поскольку в силу (25) $\lim\limits_{l\to\infty} \tilde{I}_3^{(l)} = 0$, то, учитывая равенство (18) для $j = 1, 2$, из (26) получаем искомое представление (7).

Замечание. Подробное исследование интегралов из формул (6) и (7) позволяет убедиться в том, что условие (5) является и необходимым для представления решений в виде (6) и (7). Можно также доказать единственность функции φ и обобщенной меры μ, о существовании которых утверждает теорема.

1. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы.— М. : Наука, 1964.— 443 с.
2. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $\overrightarrow{2b}$-параболические системы // Тр. семинара по функц. анализу.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1968.— № 1.— С. 3—175.
3. *Chabrowski J.* Representation theorems for parabolic systems // J. Austral. Math. Soc.— 1982.— A32, N 2.— P. 246—288.
4. *Ивасишен С. Д., Андросова Л. Н.* Об интегральном представлении и начальных значениях решений некоторых вырождающихся параболических уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1989.— № 1.— С. 16—19.
5. *Ивасишен С. Д.* Интегральное представление и начальные значения решений $\overrightarrow{2b}$-параболических систем // Укр. мат. журн.— 1990.— 42, № 4.— С. 500—506.
6. *Крехивский В. В., Матийчук М. И.* Фундаментальные решения и задача Коши для линейных параболических систем с оператором Бесселя // Докл. АН СССР.— 1968.— 181, № 6.— С. 1320—1323.
7. *Левитан Б. М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук.— 1951.— 6, вып. 2.— С. 102—143.

Черновиц. гос. ун-т

Получено 20.09.90

УДК 517.956